Desigualdades en norma para los operadores de Calderón y de Hilbert en espacios de Lebesgue y BMO^{γ}

Ferreyra, Elida V.
Flores, Guillermo J.
Viviani, Beatriz E.

Seminario del IMAL "Carlos Segovia Fernández"

Septiembre de 2017

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

1. Introducción
    - Desigualdades de Hilbert y de Hardy
    - Aplicaciones en matemática
    - Operadores de Calderón y de Hilbert
2. Preliminares
    - Operadores generalizados de Calderón y de Hilbert

Contenidos

1. Introducción
   - Desigualdades de Hilbert y de Hardy
   - Aplicaciones en matemática
   - Operadores de Calderón y de Hilbert

2. Preliminares
   - Operadores generalizados de Calderón y de Hilbert
   - Espacios de funciones y clases de pesos

Contenidos

Introducción

Teorema de la doble serie de Hilbert

Introducción

Teorema de la doble serie de Hilbert

Si $1 < p < \infty$, a_n y b_n no negativos,

Introducción

Teorema de la doble serie de Hilbert

Si $1 < p < \infty$, a_n y b_n no negativos, entonces

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m\, b_n}{m+n} \leq \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi/p)}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{p'}\right)^{1/p'}$$

Introducción

Teorema de la doble serie de Hilbert

Si $1 < p < \infty$, a_n y b_n no negativos, entonces

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m\, b_n}{m+n} \leq \frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi/p)}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{p'}\right)^{1/p'}$$

donde $\pi/\mathrm{sen}(\pi/p)$ es la constante óptima.

Introducción

Teorema de la doble serie de Hilbert

Si $1 < p < \infty$, a_n y b_n no negativos, entonces

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m\, b_n}{m+n} \leq \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi/p)}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{p'}\right)^{1/p'}$$

donde $\pi/\operatorname{sen}(\pi/p)$ es la constante óptima.

- D. Hilbert lo demostró para $p=2$ y sin constante óptima.

Introducción

Teorema de la doble serie de Hilbert

Si $1 < p < \infty$, a_n y b_n no negativos, entonces

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m\, b_n}{m+n} \leq \frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi/p)}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{p'}\right)^{1/p'}$$

donde $\pi/\mathrm{sen}(\pi/p)$ es la constante óptima.

- D. Hilbert lo demostró para $p = 2$ y sin constante óptima.
- H. Weyl lo publicó en 1908.

Introducción

Teorema de la doble serie de Hilbert

Si $1 < p < \infty$, a_n y b_n no negativos, entonces

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m\,b_n}{m+n} \leq \frac{\pi}{\text{sen}(\pi/p)}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{p'}\right)^{1/p'}$$

donde $\pi/\text{sen}(\pi/p)$ es la constante óptima.

- D. Hilbert lo demostró para $p = 2$ y sin constante óptima.
- H. Weyl lo publicó en 1908.
- J. Schur determinó la constante óptima y dio la primera versión integral para $p = 2$.

Introducción

Teorema de la doble serie de Hilbert

Si $1 < p < \infty$, a_n y b_n no negativos, entonces

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m\, b_n}{m+n} \leq \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi/p)}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{p'}\right)^{1/p'}$$

donde $\pi/\operatorname{sen}(\pi/p)$ es la constante óptima.

- D. Hilbert lo demostró para $p = 2$ y sin constante óptima.
- H. Weyl lo publicó en 1908.
- J. Schur determinó la constante óptima y dio la primera versión integral para $p = 2$.
- G. H. Hardy y M. Riesz mostraron la generalización para $1 < p < \infty$, versión discreta e integral.

Introducción

Desigualdad de Hilbert

Introducción

Desigualdad de Hilbert

Si $1 < p < \infty$,

Desigualdad de Hilbert

Si $1 < p < \infty$, entonces

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x)|\,|g(y)|}{x+y} dx\, dy \leq \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi/p)} \|f\|_p \, \|g\|_{p'}$$

Introducción

Desigualdad de Hilbert

Si $1 < p < \infty$, entonces

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x)|\,|g(y)|}{x+y} dx\, dy \leq \frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi/p)} \|f\|_p \, \|g\|_{p'}$$

donde $\pi/\mathrm{sen}(\pi/p)$ es la constante óptima.

Desigualdad de Hilbert

Si $1 < p < \infty$, entonces

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x)|\,|g(y)|}{x+y}\,dx\,dy \leq \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi/p)} \|f\|_p \, \|g\|_{p'}$$

donde $\pi/\operatorname{sen}(\pi/p)$ es la constante óptima.

- Otras demostraciones y distintas generalizaciones fueron dadas por F. Wiener (1910), J. Schur (1911), Fejér y F. Riesz (1921), Pólya y Szegö (1925), Francis y Littlewood (1928), entre otros.

Teorema

Teorema

Si $f \in L^2\big((0,1)\big)$, $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ no nula y $a_n = \int_0^1 x^n f(x)dx$,

Teorema

Si $f \in L^2\big((0,1)\big)$, $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ no nula y $a_n = \int_0^1 x^n f(x)dx$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} {a_n}^2 < \pi \int_0^1 f^2$$

Teorema

Si $f \in L^2\big((0,1)\big)$, $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ no nula y $a_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} {a_n}^2 < \pi \int_0^1 f^2$$

donde π es la constante óptima.

Teorema

Si $f \in L^2\big((0,1)\big)$, $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ no nula y $a_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} {a_n}^2 < \pi \int_0^1 f^2$$

donde π es la constante óptima.

- Los coeficientes a_n son los *momentos* de f en $(0,1)$.

Teorema

Si $f \in L^2\big((0,1)\big)$, $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ no nula y $a_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} {a_n}^2 < \pi \int_0^1 f^2$$

donde π es la constante óptima.

- Los coeficientes a_n son los *momentos* de f en $(0,1)$.
- Hardy y Littlewood (1927) demostraron un teorema más general pero sin la constante óptima.

Teorema

Teorema

Sean $1 < p < \infty$ y a_n no negativos,

Teorema

Sean $1 < p < \infty$ y a_n no negativos, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k \right)^p < p^p \sum_{n=1}^{\infty} (n a_n)^p$$

Teorema

Sean $1 < p < \infty$ y a_n no negativos, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k\right)^p < p^p \sum_{n=1}^{\infty}(na_n)^p$$

donde p^p es la constante óptima.

Desigualdad de Carleman (1923)

Desigualdad de Carleman (1923)

Sean $1 < p < \infty$ y a_n no negativos,

Desigualdad de Carleman (1923)

Sean $1 < p < \infty$ y a_n no negativos, entonces

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} {a_k}^{1/p} \right)^p < \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k \right)^{1/n} \leq e \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Desigualdad de Carleman (1923)

Sean $1 < p < \infty$ y a_n no negativos, entonces

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {a_k}^{1/p}\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leq e \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

con constantes óptimas.

Hardy (1933), Transformada de Laplace

Hardy (1933), Transformada de Laplace

Si $Lf(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$ y $1 < p \leq 2$,

Hardy (1933), Transformada de Laplace

Si $Lf(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$ y $1 < p \leq 2$, entonces

$$\int_0^\infty Lf(s)^{p'} ds \leq \frac{2\pi}{p'} \left(\int_0^\infty f(s)^p ds \right)^{p'/p}.$$

Hardy (1933), Transformada de Laplace

Si $Lf(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$ y $1 < p \leq 2$, entonces

$$\int_0^\infty Lf(s)^{p'} ds \leq \frac{2\pi}{p'} \left(\int_0^\infty f(s)^p ds \right)^{p'/p}.$$

- No se sabe si $2\pi/p'$ es la constante óptima.

Hardy (1933), Transformada de Laplace

Si $Lf(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$ y $1 < p \leq 2$, entonces

$$\int_0^\infty Lf(s)^{p'} ds \leq \frac{2\pi}{p'} \left(\int_0^\infty f(s)^p ds \right)^{p'/p}.$$

- No se sabe si $2\pi/p'$ es la constante óptima.
- Notación moderna,

$$\|Lf\|_{p'} \leq \left(\frac{2\pi}{p'} \right)^{1/p'} \|f\|_p$$

Hardy (1933), Transformada de Laplace

Si $Lf(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$ y $1 < p \leq 2$, entonces

$$\int_0^\infty Lf(s)^{p'} ds \leq \frac{2\pi}{p'} \left(\int_0^\infty f(s)^p ds \right)^{p'/p}.$$

- No se sabe si $2\pi/p'$ es la constante óptima.
- Notación moderna,

$$\|Lf\|_{p'} \leq \left(\frac{2\pi}{p'} \right)^{1/p'} \|f\|_p$$

- L es acotado de L^p en $L^{p'}$.

Introducción

Hardy, Littlewood y Pólya (1926)

Introducción

Hardy, Littlewood y Pólya (1926)

Consideraron $K(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$ como núcleo

Introducción

Hardy, Littlewood y Pólya (1926)

Consideraron $K(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$ como núcleo y como operador

$$Hf(x) = \int_0^\infty k(x,y) f(y) dy.$$

Introducción

Hardy, Littlewood y Pólya (1926)

Consideraron $K(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$ como núcleo y como operador

$$Hf(x) = \int_0^\infty k(x,y)f(y)dy.$$

- Mostraron las primeras desigualdades en normas con pesos potencia en los espacios de Lebesgue y estudiaron constantes óptimas (ver Hardy y Littlewood [HL27]).

Introducción

Desigualdades de Hardy (1920)

Introducción

Desigualdades de Hardy (1920)

Si $1 < p < \infty$, f no neg.,

Introducción

Desigualdades de Hardy (1920)

Si $1 < p < \infty$, f no neg., $\widetilde{P}f(x) = \int_0^x f(t)dt$ y $\widetilde{Q}f(x) = \int_x^\infty f(t)dt$,

Introducción

Desigualdades de Hardy (1920)

Si $1 < p < \infty$, f no neg., $\widetilde{P}f(x) = \int_0^x f(t)dt$ y $\widetilde{Q}f(x) = \int_x^\infty f(t)dt$, entonces

$$(1) \qquad \int_0^\infty \left(\frac{\widetilde{P}f(x)}{x}\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f(x)^p dx$$

$$(2) \qquad \int_0^\infty (\widetilde{Q}f(x))^p dx \leq p^p \int_0^\infty (xf(x))^p dx$$

Introducción

Desigualdades de Hardy (1920)

Si $1 < p < \infty$, f no neg., $\widetilde{P}f(x) = \int_0^x f(t)dt$ y $\widetilde{Q}f(x) = \int_x^\infty f(t)dt$, entonces

$$(1) \qquad \int_0^\infty \left(\frac{\widetilde{P}f(x)}{x}\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f(x)^p dx$$

$$(2) \qquad \int_0^\infty (\widetilde{Q}f(x))^p dx \le p^p \int_0^\infty (xf(x))^p dx$$

con constantes óptimas. $\widetilde{P}$ es el op. de Hardy y $\widetilde{Q}$ es el op. adjunto de $\widetilde{P}$.

Introducción

Desigualdades de Hardy (1920)

Si $1 < p < \infty$, f no neg., $\widetilde{P}f(x) = \int_0^x f(t)dt$ y $\widetilde{Q}f(x) = \int_x^\infty f(t)dt$, entonces

$$(1) \qquad \int_0^\infty \left(\frac{\widetilde{P}f(x)}{x}\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f(x)^p dx$$

$$(2) \qquad \int_0^\infty (\widetilde{Q}f(x))^p dx \leq p^p \int_0^\infty (xf(x))^p dx$$

con constantes óptimas. $\widetilde{P}$ es el op. de Hardy y $\widetilde{Q}$ es el op. adjunto de $\widetilde{P}$.

- Los Teoremas clásicos de interpolación son una consecuencia de las *Desigualdades de Hardy*.

Operadores de Calderón S y de Hilbert H

Introducción

Operadores de Calderón S y de Hilbert H

$$Sf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt + \int_x^\infty \frac{f(t)}{t}dt \quad \text{y} \quad Hf(x) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{x+t}dt$$

Introducción

Operadores de Calderón S y de Hilbert H

$$Sf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt + \int_x^\infty \frac{f(t)}{t}dt \quad \text{y} \quad Hf(x) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{x+t}dt$$

- Es conocido que $S = P + Q$, donde P es el operador promedio de Hardy y Q su adjunto.

Introducción

Operadores de Calderón S y de Hilbert H

$$Sf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt + \int_x^\infty \frac{f(t)}{t}dt \quad \text{y} \quad Hf(x) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{x+t}dt$$

- Es conocido que $S = P + Q$, donde P es el operador promedio de Hardy y Q su adjunto.

Introducción

Operadores de Calderón S y de Hilbert H

$$Sf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt + \int_x^\infty \frac{f(t)}{t}dt \quad \text{y} \quad Hf(x) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{x+t}dt$$

- Es conocido que $S = P + Q$, donde P es el operador promedio de Hardy y Q su adjunto.

Introducción

Operadores de Calderón S y de Hilbert H

$$Sf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt + \int_x^\infty \frac{f(t)}{t}dt \quad \text{y} \quad Hf(x) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{x+t}dt$$

- Es conocido que $S = P + Q$, donde P es el operador promedio de Hardy y Q su adjunto. El operador H surge de la versión continua de la desigualdad de Hilbert (ver Hardy y Littlewood [HL27]).

Introducción

Operadores de Calderón S y de Hilbert H

$$Sf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt + \int_x^\infty \frac{f(t)}{t}dt \quad \text{y} \quad Hf(x) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{x+t}dt$$

- Es conocido que $S = P + Q$, donde P es el operador promedio de Hardy y Q su adjunto. El operador H surge de la versión continua de la desigualdad de Hilbert (ver Hardy y Littlewood [HL27]).
- Es fácil mostar que para funciones no negativas

$$Hf(x) \leq Sf(x) \leq 2Hf(x)$$

Operadores de Calderón S y de Hilbert H

$$Sf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt + \int_x^\infty \frac{f(t)}{t}dt \quad \text{y} \quad Hf(x) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{x+t}dt$$

- Es conocido que $S = P + Q$, donde P es el operador promedio de Hardy y Q su adjunto. El operador H surge de la versión continua de la desigualdad de Hilbert (ver Hardy y Littlewood [HL27]).
- Es fácil mostar que para funciones no negativas

$$Hf(x) \leq Sf(x) \leq 2Hf(x)$$

Consecuentemente, las L^p-desigualdades obtenidas para S son ciertas para H, y recíprocamente.

Muckenhoupt [Muc72]

Muckenhoupt [Muc72]

- Sea $1 < p < \infty$. S es acotado sobre $L^p(\omega)$ si y sólo si $\omega \in C_p$.

Muckenhoupt [Muc72]

- Sea $1 < p < \infty$. S es acotado sobre $L^p(\omega)$ si y sólo si $\omega \in C_p$. (C_p denota la clase de pesos de Calderón)

Muckenhoupt [Muc72]

- Sea $1 < p < \infty$. S es acotado sobre $L^p(\omega)$ si y sólo si $\omega \in C_p$. (C_p denota la clase de pesos de Calderón)

Duoandikoetxea, Martín-Reyes y Ombrosi [DMRO13]

Muckenhoupt [Muc72]

- Sea $1 < p < \infty$. S es acotado sobre $L^p(\omega)$ si y sólo si $\omega \in C_p$. (C_p denota la clase de pesos de Calderón)

Duoandikoetxea, Martín-Reyes y Ombrosi [DMRO13]

- La clase C_p coincide con la clase $A_{p,0}$.

Muckenhoupt [Muc72]

- Sea $1 < p < \infty$. S es acotado sobre $L^p(\omega)$ si y sólo si $\omega \in C_p$.
  (C_p denota la clase de pesos de Calderón)

Duoandikoetxea, Martín-Reyes y Ombrosi [DMRO13]

- La clase C_p coincide con la clase $A_{p,0}$.
  Donde la condición de los pesos en $A_{p,0}$ es la misma que la de la clase A_p pero solamente para bolas centradas en el origen.

Muckenhoupt [Muc72]

- Sea $1 < p < \infty$. S es acotado sobre $L^p(\omega)$ si y sólo si $\omega \in C_p$. (C_p denota la clase de pesos de Calderón)

Duoandikoetxea, Martín-Reyes y Ombrosi [DMRO13]

- La clase C_p coincide con la clase $A_{p,0}$.
Donde la condición de los pesos en $A_{p,0}$ es la misma que la de la clase A_p pero solamente para bolas centradas en el origen.

- $$\sup_{B\,:\,B=B(0,r)} \left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega^{-1/(p-1)}\right)^{p-1} < \infty$$

Pregunta

Pregunta

- Nos pareció natural preguntarnos cómo actúan estos operadores sobre espacios de tipo BMO o Lipschitz.

Pregunta

- Nos pareció natural preguntarnos cómo actúan estos operadores sobre espacios de tipo BMO o Lipschitz.
- También nos pareció interesante cuáles serían en estos casos los "pesos de Calderón" para obtener desigualdades pesadas en estos espacios.

Pregunta

- Nos pareció natural preguntarnos cómo actúan estos operadores sobre espacios de tipo BMO o Lipschitz.
- También nos pareció interesante cuáles serían en estos casos los “pesos de Calderón” para obtener desigualdades pesadas en estos espacios.

Antecedentes

Pregunta

- Nos pareció natural preguntarnos cómo actúan estos operadores sobre espacios de tipo BMO o Lipschitz.
- También nos pareció interesante cuáles serían en estos casos los “pesos de Calderón” para obtener desigualdades pesadas en estos espacios.

Antecedentes

- Este tipo de problemas fue estudiado para la integral fraccionaria por Muckenhoupt y Wheeden [MW74], y por Harboure, Salinas y Viviani [HSV97].

Pregunta

- Nos pareció natural preguntarnos cómo actúan estos operadores sobre espacios de tipo BMO o Lipschitz.
- También nos pareció interesante cuáles serían en estos casos los "pesos de Calderón" para obtener desigualdades pesadas en estos espacios.

Antecedentes

- Este tipo de problemas fue estudiado para la integral fraccionaria por Muckenhoupt y Wheeden [MW74], y por Harboure, Salinas y Viviani [HSV97]. También, para ciertos operadores de tipo fraccionario, se estudió en [FF15b] (Preprint 2017).

Preliminares

Operadores generalizados de Calderón S_α y de Hilbert H_α $(0 \leq \alpha < n)$

$$S_\alpha f(x) = \frac{1}{|x|^{n-\alpha}} \int_{|y| \leq |x|} f(y)dy + \int_{|y|>|x|} \frac{f(y)}{|y|^{n-\alpha}} dy$$

$$H_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{(|x|+|y|)^{n-\alpha}} dy$$

Operadores generalizados de Calderón S_α y de Hilbert H_α $(0 \leq \alpha < n)$

$$S_\alpha f(x) = \frac{1}{|x|^{n-\alpha}} \int_{|y|\leq|x|} f(y)dy + \int_{|y|>|x|} \frac{f(y)}{|y|^{n-\alpha}}dy$$

$$H_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{(|x|+|y|)^{n-\alpha}}dy$$

- Como antes, es fácil mostar que para funciones no negativas

Preliminares

Operadores generalizados de Calderón S_α y de Hilbert H_α $(0 \leq \alpha < n)$

$$S_\alpha f(x) = \frac{1}{|x|^{n-\alpha}} \int_{|y| \leq |x|} f(y)dy + \int_{|y|>|x|} \frac{f(y)}{|y|^{n-\alpha}} dy$$

$$H_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{(|x|+|y|)^{n-\alpha}} dy$$

- Como antes, es fácil mostar que para funciones no negativas

$$H_\alpha f(x) \leq S_\alpha f(x) \leq 2^{n-\alpha} H_\alpha f(x)$$

Operadores generalizados de Calderón S_α y de Hilbert H_α $(0 \leq \alpha < n)$

$$S_\alpha f(x) = \frac{1}{|x|^{n-\alpha}} \int_{|y|\leq|x|} f(y)dy + \int_{|y|>|x|} \frac{f(y)}{|y|^{n-\alpha}} dy$$

$$H_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{(|x|+|y|)^{n-\alpha}} dy$$

- Como antes, es fácil mostar que para funciones no negativas

$$H_\alpha f(x) \leq S_\alpha f(x) \leq 2^{n-\alpha} H_\alpha f(x)$$

Aunque no se pueden obtener resultados inmediatos a partir de estas comparaciones en espacios de tipo BMO.

Ambos operadores S_α y H_α aparecen en diferentes contextos y aplicaciones, por ejemplo en los trabajos de H. Weyl [Wey08], Hardy, Littlewood y Pólya [HLP88], Dieudonné [Die93], Bastero, Milman y Ruiz [BMR01], Nowak y Stempak [NS06], Harboure, Segovia, Torrea y Viviani [HSTV08], Duoandikoetxea [Duo13], entre otros.

$BMO^{\gamma}(\omega)$, $0 \leq \gamma < 1/n$

$BMO^{\gamma}(\omega)$, $0 \leq \gamma < 1/n$

$$\frac{1}{\omega(B)|B|^{\gamma}} \int_B |f - f_B| \leq C$$

$\forall\, B \subset \mathbb{R}^n$

$BMO^{\gamma}(\omega)$, $0 \leq \gamma < 1/n$

$$\frac{1}{\omega(B)|B|^{\gamma}} \int_B |f - f_B| \leq C$$

$\forall\, B \subset \mathbb{R}^n$

- $\omega(B) = \displaystyle\int_B \omega$

$BMO^{\gamma}(\omega)$, $0 \leq \gamma < 1/n$

$$\frac{1}{\omega(B)|B|^{\gamma}} \int_B |f - f_B| \leq C$$

$\forall\, B \subset \mathbb{R}^n$

- $\omega(B) = \displaystyle\int_B \omega$
- $\|f\|_{BMO^{\gamma}(\omega)}$ denota la seminorma en $BMO^{\gamma}(\omega)$

$BMO^\gamma(\omega)$, $0 \leq \gamma < 1/n$

$$\frac{1}{\omega(B)|B|^\gamma}\int_B |f - f_B| \leq C$$

$\forall\, B \subset \mathbb{R}^n$

- $\omega(B) = \int_B \omega$
- $\|f\|_{BMO^\gamma(\omega)}$ denota la seminorma en $BMO^\gamma(\omega)$
- $BMO^0(\omega) = BMO(\omega)$

$BMO^\gamma(\omega)$, $0 \leq \gamma < 1/n$

$$\frac{1}{\omega(B)|B|^\gamma}\int_B |f - f_B| \leq C$$

$\forall\, B \subset \mathbb{R}^n$

- $\omega(B) = \int_B \omega$
- $\|f\|_{BMO^\gamma(\omega)}$ denota la seminorma en $BMO^\gamma(\omega)$
- $BMO^0(\omega) = BMO(\omega)$
- Son espacios de Lipschitz con pesos, introducidos en [HSV97]

$BM_0^\gamma(\omega)$, $0 \leq \gamma < 1/n$

Preliminares

Espacios de funciones

$BM_0^\gamma(\omega)$, $0 \leq \gamma < 1/n$

$$\frac{1}{\omega(B)|B|^\gamma} \int_B |f| \leq C$$

$\forall\, B \subset \mathbb{R}^n$, centrada en el origen

$BM_0^\gamma(\omega)$, $0 \leq \gamma < 1/n$

$$\frac{1}{\omega(B)|B|^\gamma}\int_B |f| \leq C$$

$\forall\, B \subset \mathbb{R}^n$, centrada en el origen

- $\|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)}$ denota la norma en $BM_0^\gamma(\omega)$

$BM_0^\gamma(\omega)$, $0 \le \gamma < 1/n$

$$\frac{1}{\omega(B)|B|^\gamma} \int_B |f| \le C$$

$\forall\, B \subset \mathbb{R}^n$, centrada en el origen

- $\|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)}$ denota la norma en $BM_0^\gamma(\omega)$
- $L^\infty(\omega^{-1}) \subset BM_0(\omega) \cap BMO(\omega)$

$RH(p)$, reverse Hölder con exponente $1 < p < \infty$

$RH(p)$, reverse Hölder con exponente $1 < p < \infty$

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega^p\right)^{1/p} \leq C\frac{1}{|B|}\int_B \omega$$

$\forall\, B \subset \mathbb{R}^n$

$RH(p)$, reverse Hölder con exponente $1 < p < \infty$

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega^p\right)^{1/p} \leq C\frac{1}{|B|}\int_B \omega$$

$\forall\, B \subset \mathbb{R}^n$

$RH_0(p)$, con exponente $1 < p < \infty$

$RH(p)$, reverse Hölder con exponente $1 < p < \infty$

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega^p\right)^{1/p} \leq C\frac{1}{|B|}\int_B \omega$$

$\forall\, B \subset \mathbb{R}^n$

$RH_0(p)$, con exponente $1 < p < \infty$

Son los pesos que satisfacen la condición de $RH(p)$ solamente para bolas centradas en el origen

Clase D_0

$$\omega(2B) \leq C\omega(B)$$

$\forall\, B \subset \mathbb{R}^n$, centrada en el origen

Clase D_0

$$\omega(2B) \leq C\omega(B)$$

$\forall\, B \subset \mathbb{R}^n$, centrada en el origen

Clase D_η, $\eta \geq 1$

$$\frac{\omega(2B(x,|x|+r))}{|B(x,|x|+r)|^\eta} \leq C\frac{\omega(B(x,r))}{|B(x,r)|^\eta}$$

$\forall\, B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$

Clase D_0

$$\omega(2B) \leq C\omega(B)$$

$\forall\, B \subset \mathbb{R}^n$, centrada en el origen

Clase D_η, $\eta \geq 1$

$$\frac{\omega(2B(x,|x|+r))}{|B(x,|x|+r)|^\eta} \leq C\frac{\omega(B(x,r))}{|B(x,r)|^\eta}$$

$\forall\, B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$

- Si $\omega \in D_\eta \Longrightarrow \omega \in D_0$,

Clase D_0

$$\omega(2B) \leq C\omega(B)$$

$\forall\, B \subset \mathbb{R}^n$, centrada en el origen

Clase D_η, $\eta \geq 1$

$$\frac{\omega(2B(x,|x|+r))}{|B(x,|x|+r)|^\eta} \leq C\frac{\omega(B(x,r))}{|B(x,r)|^\eta}$$

$\forall\, B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$

- Si $\omega \in D_\eta \implies \omega \in D_0$, pero no duplica $\forall\, B(x,r)$

Clase $H_0(\alpha, p)$, $0 \leq \alpha < n$ y $1 < p < \infty$

Clase $H_0(\alpha, p)$, $0 \leq \alpha < n$ y $1 < p < \infty$

$$\left(\int_{B^c} \frac{\omega^{p'}(y)}{|y|^{(n-\alpha+1)p'}} dy \right)^{1/p'} \leq C \frac{\omega(B)}{|B|^{1+1/p-\alpha/n+1/n}}$$

$\forall\, B \subset \mathbb{R}^n$, centrada en el origen

Clase $H_0(\alpha, p)$, $0 \leq \alpha < n$ y $1 < p < \infty$

$$\left(\int_{B^c} \frac{\omega^{p'}(y)}{|y|^{(n-\alpha+1)p'}} dy \right)^{1/p'} \leq C \frac{\omega(B)}{|B|^{1+1/p-\alpha/n+1/n}}$$

$\forall\, B \subset \mathbb{R}^n$, centrada en el origen

Clase $H_0(\alpha, \infty)$, $0 \leq \alpha < n$

Preliminares

Clases de Pesos

Clase $H_0(\alpha,p)$, $0\le\alpha<n$ y $1<p<\infty$

$$\left(\int_{B^c}\frac{\omega^{p'}(y)}{|y|^{(n-\alpha+1)p'}}dy\right)^{1/p'}\le C\frac{\omega(B)}{|B|^{1+1/p-\alpha/n+1/n}}$$

$\forall\, B\subset\mathbb{R}^n$, centrada en el origen

Clase $H_0(\alpha,\infty)$, $0\le\alpha<n$

$$\int_{B^c}\frac{\omega(y)}{|y|^{n-\alpha+1}}dy\le C\frac{\omega(B)}{|B|^{1-\alpha/n+1/n}}$$

$\forall\, B\subset\mathbb{R}^n$, centrada en el origen

Clase $H_0(\alpha,p)$, $0\leq\alpha<n$ y $1<p<\infty$

$$\left(\int_{B^c}\frac{\omega^{p'}(y)}{|y|^{(n-\alpha+1)p'}}dy\right)^{1/p'}\leq C\frac{\omega(B)}{|B|^{1+1/p-\alpha/n+1/n}}$$

$\forall\, B\subset\mathbb{R}^n$, centrada en el origen

Clase $H_0(\alpha,\infty)$, $0\leq\alpha<n$

$$\int_{B^c}\frac{\omega(y)}{|y|^{n-\alpha+1}}dy\leq C\frac{\omega(B)}{|B|^{1-\alpha/n+1/n}}$$

$\forall\, B\subset\mathbb{R}^n$, centrada en el origen

- Estas condiciones, pero para toda bola, fueron introducidas en [HSV97]

$\omega \equiv 1$ y $0 < \alpha < n$

$\omega \equiv 1$ y $0 < \alpha < n$

- Estudiamos ¿$S_\alpha,\ H_\alpha : L^p(\omega^{-p}) \longrightarrow BMO^\gamma(\omega)$ para $p \geq n/\alpha$?

$\omega \equiv 1$ y $0 < \alpha < n$

- Estudiamos ¿$S_\alpha,\ H_\alpha : L^p(\omega^{-p}) \longrightarrow BMO^\gamma(\omega)$ para $p \geq n/\alpha$?
  Pero $\exists\, f \in L^p(\omega^{-p})$: $S_\alpha f,\ H_\alpha f \equiv \infty$

$\omega \equiv 1$ y $0 < \alpha < n$

- Estudiamos ¿$S_\alpha,\ H_\alpha : L^p(\omega^{-p}) \longrightarrow BMO^\gamma(\omega)$ para $p \geq n/\alpha$?
  Pero $\exists\, f \in L^p(\omega^{-p}) : S_\alpha f,\ H_\alpha f \equiv \infty$
- Si $\dfrac{n}{\alpha} < p \implies f(x) = \dfrac{\chi_{B^c(0,1)}(x)}{|x|^\alpha} \in L^p(\omega^{-p})$

Resultados principales para S_α y H_α

Comentarios en $L^p(\omega^{-p})$

$\omega \equiv 1$ y $0 < \alpha < n$

- Estudiamos ¿$S_\alpha,\ H_\alpha : L^p(\omega^{-p}) \longrightarrow BMO^\gamma(\omega)$ para $p \geq n/\alpha$?
  Pero $\exists\, f \in L^p(\omega^{-p}) : S_\alpha f,\ H_\alpha f \equiv \infty$
- Si $\dfrac{n}{\alpha} < p \implies f(x) = \dfrac{\chi_{B^c(0,1)}(x)}{|x|^\alpha} \in L^p(\omega^{-p})$ y $S_\alpha f \equiv \infty$

Resultados principales para S_α y H_α

Comentarios en $L^p(\omega^{-p})$

$\omega \equiv 1$ y $0 < \alpha < n$

- Estudiamos ¿$S_\alpha,\ H_\alpha : L^p(\omega^{-p}) \longrightarrow BMO^\gamma(\omega)$ para $p \geq n/\alpha$?
  Pero $\exists\, f \in L^p(\omega^{-p}) : S_\alpha f,\ H_\alpha f \equiv \infty$
- Si $\dfrac{n}{\alpha} < p \implies f(x) = \dfrac{\chi_{B^c(0,1)}(x)}{|x|^\alpha} \in L^p(\omega^{-p})$ y $S_\alpha f \equiv \infty$
- Si $\dfrac{n}{\alpha} = p \implies g(x) = \dfrac{\chi_{B^c(0,2)}(x)}{|x|^\alpha(\log|x|)^{(1+1/p)/2}} \in L^p(\omega^{-p})$

Resultados principales para S_α y H_α

Comentarios en $L^p(\omega^{-p})$

$\omega \equiv 1$ y $0 < \alpha < n$

- Estudiamos ¿$S_\alpha,\ H_\alpha : L^p(\omega^{-p}) \longrightarrow BMO^\gamma(\omega)$ para $p \geq n/\alpha$?
  Pero $\exists\, f \in L^p(\omega^{-p}) : S_\alpha f,\ H_\alpha f \equiv \infty$
- Si $\dfrac{n}{\alpha} < p \implies f(x) = \dfrac{\chi_{B^c(0,1)}(x)}{|x|^\alpha} \in L^p(\omega^{-p})$ y $S_\alpha f \equiv \infty$
- Si $\dfrac{n}{\alpha} = p \implies g(x) = \dfrac{\chi_{B^c(0,2)}(x)}{|x|^\alpha(\log|x|)^{(1+1/p)/2}} \in L^p(\omega^{-p})$ y
  $S_\alpha g \equiv \infty$

$\omega \equiv 1$ y $0 < \alpha < n$

- Estudiamos ¿$S_\alpha,\ H_\alpha : L^p(\omega^{-p}) \longrightarrow BMO^\gamma(\omega)$ para $p \geq n/\alpha$?
  Pero $\exists\, f \in L^p(\omega^{-p}) : S_\alpha f,\ H_\alpha f \equiv \infty$
- Si $\dfrac{n}{\alpha} < p \implies f(x) = \dfrac{\chi_{B^c(0,1)}(x)}{|x|^\alpha} \in L^p(\omega^{-p})$ y $S_\alpha f \equiv \infty$
- Si $\dfrac{n}{\alpha} = p \implies g(x) = \dfrac{\chi_{B^c(0,2)}(x)}{|x|^\alpha (\log|x|)^{(1+1/p)/2}} \in L^p(\omega^{-p})$ y $S_\alpha g \equiv \infty$

- $\{$Funciones de soporte compacto en $L^\infty(\omega^{-1})\} \subset L^p(\omega^{-p})$

Resultados principales para S_α y H_α

Comentarios en $L^p(\omega^{-p})$

$\omega \equiv 1$ y $0 < \alpha < n$

- Estudiamos ¿$S_\alpha,\ H_\alpha : L^p(\omega^{-p}) \longrightarrow BMO^\gamma(\omega)$ para $p \geq n/\alpha$?
  Pero $\exists\, f \in L^p(\omega^{-p}) : S_\alpha f,\ H_\alpha f \equiv \infty$
- Si $\dfrac{n}{\alpha} < p \implies f(x) = \dfrac{\chi_{B^c(0,1)}(x)}{|x|^\alpha} \in L^p(\omega^{-p})$ y $S_\alpha f \equiv \infty$
- Si $\dfrac{n}{\alpha} = p \implies g(x) = \dfrac{\chi_{B^c(0,2)}(x)}{|x|^\alpha (\log|x|)^{(1+1/p)/2}} \in L^p(\omega^{-p})$ y $S_\alpha g \equiv \infty$

- $\{$Funciones de soporte compacto en $L^\infty(\omega^{-1})\} \subset L^p(\omega^{-p})$
  y $S_\alpha f,\ H_\alpha f < \infty$ en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ para tales funciones

$\omega \equiv 1$ y $0 \leq \alpha < n$

Resultados principales para S_α y H_α

Comentarios en $BM_0^\gamma(\omega)$

$\omega \equiv 1$ y $0 \leq \alpha < n$

- También estudiamos ¿S_α, $H_\alpha : BM_0^\gamma(\omega) \longrightarrow BMO^\delta(\omega)$?

$\omega \equiv 1$ y $0 \leq \alpha < n$

- También estudiamos ¿S_α, $H_\alpha : BM_0^\gamma(\omega) \longrightarrow BMO^\delta(\omega)$?
  Y también $\exists\, f \in BM_0^\gamma(\omega)$: $S_\alpha f,\ H_\alpha f \equiv \infty$

$\omega \equiv 1$ y $0 \leq \alpha < n$

- También estudiamos ¿S_α, $H_\alpha : BM_0^\gamma(\omega) \longrightarrow BMO^\delta(\omega)$?
  Y también $\exists\, f \in BM_0^\gamma(\omega) : S_\alpha f,\, H_\alpha f \equiv \infty$
- Si $h(x) = \chi_{B^c(0,1)}(x) \implies h \in BM_0^\gamma(\omega)$

$\omega \equiv 1$ y $0 \leq \alpha < n$

- También estudiamos ¿S_α, $H_\alpha : BM_0^\gamma(\omega) \longrightarrow BMO^\delta(\omega)$?
  Y también $\exists\, f \in BM_0^\gamma(\omega) : S_\alpha f,\, H_\alpha f \equiv \infty$
- Si $h(x) = \chi_{B^c(0,1)}(x) \implies h \in BM_0^\gamma(\omega)$ y $S_\alpha h \equiv \infty$

$\omega \equiv 1$ y $0 \leq \alpha < n$

- También estudiamos ¿$S_\alpha,\ H_\alpha : BM_0^\gamma(\omega) \longrightarrow BMO^\delta(\omega)$?
  Y también $\exists\, f \in BM_0^\gamma(\omega) : S_\alpha f,\ H_\alpha f \equiv \infty$
- Si $h(x) = \chi_{B^c(0,1)}(x) \implies h \in BM_0^\gamma(\omega)$ y $S_\alpha h \equiv \infty$

- $\big\{$F. de sop. compacto ($0 \notin$ sop.) en $L^\infty(\omega^{-1})\big\} \subset BM_0^\gamma(\omega)$

$\omega \equiv 1$ y $0 \leq \alpha < n$

- También estudiamos ¿S_α, $H_\alpha : BM_0^\gamma(\omega) \longrightarrow BMO^\delta(\omega)$?
  Y también $\exists\, f \in BM_0^\gamma(\omega) : S_\alpha f,\, H_\alpha f \equiv \infty$
- Si $h(x) = \chi_{B^c(0,1)}(x) \implies h \in BM_0^\gamma(\omega)$ y $S_\alpha h \equiv \infty$

- $\big\{$F. de sop. compacto $(0 \notin$ sop.$)$ en $L^\infty(\omega^{-1})\big\} \subset BM_0^\gamma(\omega)$
  y $S_\alpha f,\, H_\alpha f < \infty$ en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ para tales funciones

Resultados principales para S_α y H_α

Comentarios en $BM_0^\gamma(\omega)$

$\omega \equiv 1$ y $0 \leq \alpha < n$

- También estudiamos ¿S_α, $H_\alpha : BM_0^\gamma(\omega) \longrightarrow BMO^\delta(\omega)$?
  Y también $\exists\, f \in BM_0^\gamma(\omega) : S_\alpha f,\, H_\alpha f \equiv \infty$
- Si $h(x) = \chi_{B^c(0,1)}(x) \implies h \in BM_0^\gamma(\omega)$ y $S_\alpha h \equiv \infty$

- $\big\{$F. de sop. compacto $(0 \notin$ sop.$)$ en $L^\infty(\omega^{-1})\big\} \subset BM_0^\gamma(\omega)$
  y $S_\alpha f,\, H_\alpha f < \infty$ en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ para tales funciones
- Consideraremos funciones $f \in L^p(\omega^{-p}) \cup BM_0^\gamma(\omega)$ tales que $S_\alpha f,\, H_\alpha f < \infty$

Clase $A_{1,0}$

$$\frac{1}{|B|}\int_B \omega \leq C \operatorname*{ess\,inf}_{x\,:\,x\in B=B(0,r)} \omega(x), \quad \forall\, B = B(0,r)$$

Clase $A_{1,0}$

$$\frac{1}{|B|}\int_B \omega \leq C \operatorname*{ess\,inf}_{x\,:\,x\in B=B(0,r)} \omega(x), \quad \forall\, B = B(0,r)$$

Si $\omega \in A_{1,0}$ y $S_0 = S$ es el operador clásico de Calderón,

Clase $A_{1,0}$

$$\frac{1}{|B|}\int_B \omega \le C \operatorname*{ess\,inf}_{x\,:\,x\in B=B(0,r)} \omega(x), \quad \forall\, B = B(0,r)$$

Si $\omega \in A_{1,0}$ y $S_0 = S$ es el operador clásico de Calderón, naturalmente

$$S : BM_0(\omega) \longrightarrow BMO(\omega) \quad \text{y} \quad L^\infty(\omega^{-1}) \subset BM_0(\omega) \tag{1}$$

Clase $A_{1,0}$

$$\frac{1}{|B|}\int_B \omega \leq C \operatorname*{ess\,inf}_{x\,:\,x\in B=B(0,r)} \omega(x), \quad \forall\, B = B(0,r)$$

Si $\omega \in A_{1,0}$ y $S_0 = S$ es el operador clásico de Calderón, naturalmente

$$S : BM_0(\omega) \longrightarrow BMO(\omega) \quad \text{y} \quad L^\infty(\omega^{-1}) \subset BM_0(\omega) \tag{1}$$

Motivación

- Esta fue la principal motivación para considerar el espacio $BM_0^\gamma(\omega)$

Resultados principales para S_α y H_α

Comentarios sobre $BM_0^\gamma(\omega)$

Clase $A_{1,0}$

$$\frac{1}{|B|}\int_B \omega \leq C \operatorname*{ess\,inf}_{x\,:\,x\in B=B(0,r)} \omega(x), \quad \forall\, B = B(0,r)$$

Si $\omega \in A_{1,0}$ y $S_0 = S$ es el operador clásico de Calderón, naturalmente

$$S : BM_0(\omega) \longrightarrow BMO(\omega) \quad \text{y} \quad L^\infty(\omega^{-1}) \subset BM_0(\omega) \tag{1}$$

Motivación

- Esta fue la principal motivación para considerar el espacio $BM_0^\gamma(\omega)$
- En [FF15a] está probado (1)

Resultados principales para S_α y H_α

Lema

Resultados principales para S_α y H_α

Lema

Si $f \in L^p(\omega^{-p}) \cup BM_0^\gamma(\omega)$ *y* $S_\alpha f(x) < \infty$ *para algún* $x \neq 0$,

Resultados principales para S_α y H_α

Lema

Si $f \in L^p(\omega^{-p}) \cup BM_0^\gamma(\omega)$ *y* $S_\alpha f(x) < \infty$ *para algún* $x \neq 0$, *entonces* $S_\alpha f$ *es finito en* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Resultados principales para S_α y H_α

Lema

Si $f \in L^p(\omega^{-p}) \cup BM_0^\gamma(\omega)$ y $S_\alpha f(x) < \infty$ para algún $x \neq 0$, entonces $S_\alpha f$ es finito en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Lo mismo sucede para H_α.

Resultados principales para S_α y H_α

Lema

Si $f \in L^p(\omega^{-p}) \cup BM_0^\gamma(\omega)$ *y* $S_\alpha f(x) < \infty$ *para algún* $x \neq 0$*, entonces* $S_\alpha f$ *es finito en* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*. Lo mismo sucede para* H_α*.*

Supongamos que $\alpha > 0$, $n/\alpha \leq p < n/(\alpha-1)^+$,
$\eta = 1 + 1/n + 1/p - \alpha/n$ y $\delta = \alpha/n - 1/p$

Resultados principales para S_α y H_α

Lema

Si $f \in L^p(\omega^{-p}) \cup BM_0^\gamma(\omega)$ y $S_\alpha f(x) < \infty$ para algún $x \neq 0$, entonces $S_\alpha f$ es finito en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Lo mismo sucede para H_α.

Supongamos que $\alpha > 0$, $n/\alpha \leq p < n/(\alpha-1)^+$,
$\eta = 1 + 1/n + 1/p - \alpha/n$ y $\delta = \alpha/n - 1/p$

- Teorema 1
  $S_\alpha : L^p(\omega^{-p}) \to BMO^\delta(\omega)$ y $\omega^{p'} \in D_0 \Longleftrightarrow \omega \in RH_0(p') \cap D_\eta$

Resultados principales para S_α y H_α

Lema

Si $f \in L^p(\omega^{-p}) \cup BM_0^{\gamma}(\omega)$ y $S_\alpha f(x) < \infty$ para algún $x \neq 0$, entonces $S_\alpha f$ es finito en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Lo mismo sucede para H_α.

Supongamos que $\alpha > 0$, $n/\alpha \leq p < n/(\alpha-1)^+$,
$\eta = 1 + 1/n + 1/p - \alpha/n$ y $\delta = \alpha/n - 1/p$

- **Teorema 1**
  $S_\alpha : L^p(\omega^{-p}) \to BMO^\delta(\omega)$ y $\omega^{p'} \in D_0 \iff \omega \in RH_0(p') \cap D_\eta$
- **Teorema 2**
  $H_\alpha : L^p(\omega^{-p}) \to BMO^\delta(\omega) \iff \omega \in \mathsf{H}_0(\alpha, p) \cap RH_0(p') \cap D_\eta$

Resultados principales para S_α y H_α

Supongamos que $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \gamma < 1/n - \alpha/n$,
$\eta = 1 + 1/n - \alpha/n - \gamma$ y $\delta = \alpha/n + \gamma$

Resultados principales para S_α y H_α

Supongamos que $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \gamma < 1/n - \alpha/n$,
$\eta = 1 + 1/n - \alpha/n - \gamma$ y $\delta = \alpha/n + \gamma$

- Teorema 3
  $S_\alpha : BM_0^\gamma(\omega) \to BMO^\delta(\omega)$ y $\omega \in D_0 \Longleftrightarrow \omega \in D_\eta$

Resultados principales para S_α y H_α

Supongamos que $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \gamma < 1/n - \alpha/n$,
$\eta = 1 + 1/n - \alpha/n - \gamma$ y $\delta = \alpha/n + \gamma$

- Teorema 3
  $S_\alpha : BM_0^\gamma(\omega) \to BMO^\delta(\omega)$ y $\omega \in D_0 \iff \omega \in D_\eta$
- Teorema 4
  $H_\alpha : BM_0^\gamma(\omega) \to BMO^\delta(\omega) \iff \omega \in \mathsf{H}_0(\alpha + n\gamma, \infty) \cap D_\eta$

Resultados principales para S_α y H_α

Supongamos que $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \gamma < 1/n - \alpha/n$, $\eta = 1 + 1/n - \alpha/n - \gamma$ y $\delta = \alpha/n + \gamma$

- Teorema 3
  $S_\alpha : BM_0^\gamma(\omega) \to BMO^\delta(\omega)$ y $\omega \in D_0 \iff \omega \in D_\eta$
- Teorema 4
  $H_\alpha : BM_0^\gamma(\omega) \to BMO^\delta(\omega) \iff \omega \in \mathsf{H}_0(\alpha + n\gamma, \infty) \cap D_\eta$

Sea $\eta = 1 + 1/n$

Resultados principales para S_α y H_α

Supongamos que $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \gamma < 1/n - \alpha/n$, $\eta = 1 + 1/n - \alpha/n - \gamma$ y $\delta = \alpha/n + \gamma$

- Teorema 3
  $S_\alpha : BM_0^\gamma(\omega) \to BMO^\delta(\omega)$ y $\omega \in D_0 \iff \omega \in D_\eta$
- Teorema 4
  $H_\alpha : BM_0^\gamma(\omega) \to BMO^\delta(\omega) \iff \omega \in \mathsf{H}_0(\alpha + n\gamma, \infty) \cap D_\eta$

Sea $\eta = 1 + 1/n$

- Corolario (del Teorema 3)
  $S : L^\infty(\omega^{-1}) \to BMO(\omega)$ y $\omega \in D_0 \iff \omega \in D_\eta$

Resultados principales para S_α y H_α

Supongamos que $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \gamma < 1/n - \alpha/n$, $\eta = 1 + 1/n - \alpha/n - \gamma$ y $\delta = \alpha/n + \gamma$

- Teorema 3
  $S_\alpha : BM_0^\gamma(\omega) \to BMO^\delta(\omega)$ y $\omega \in D_0 \iff \omega \in D_\eta$
- Teorema 4
  $H_\alpha : BM_0^\gamma(\omega) \to BMO^\delta(\omega) \iff \omega \in \mathsf{H}_0(\alpha + n\gamma, \infty) \cap D_\eta$

Sea $\eta = 1 + 1/n$

- Corolario (del Teorema 3)
  $S : L^\infty(\omega^{-1}) \to BMO(\omega)$ y $\omega \in D_0 \iff \omega \in D_\eta$
- Corolario (del Teorema 4)
  $H : L^\infty(\omega^{-1}) \to BMO(\omega) \iff \omega \in \mathsf{H}_0(0, \infty) \cap D_\eta$

Muchas gracias!!

Jesús Bastero, Mario Milman, and Francisco J. Ruiz, *On the connection between weighted norm inequalities, commutators and real interpolation*, Mem. Amer. Math. Soc. **154** (2001), no. 731, viii+80. MR 1848159

J. Dieudonné, *Treatise on analysis. Vol. VIII*, Pure and Applied Mathematics, vol. 10, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1993, Translated from the French by Laura Fainsilber. MR 1228444

Javier Duoandikoetxea, Francisco J. Martín-Reyes, and Sheldy Ombrosi, *Calderón weights as Muckenhoupt weights*, Indiana Univ. Math. J. **62** (2013), no. 3, 891–910. MR 3164849

Javier Duoandikoetxea, *Fractional integrals on radial functions with applications to weighted inequalities*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **192** (2013), no. 4, 553–568. MR 3081635

Elida Ferreyra and Guillermo Flores, *Weighted estimates for integral operators on local BMO type spaces*, Math. Nachr. **288** (2015), no. 8–9, 905–916.

——— , *Weighted inequalities for integral operators on $BMO^{\gamma}(\omega)$ spaces*, Preprint, submitted (2015).

G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Notes on the Theory of Series (VI) : Two Inequalities*, J. London Math. Soc. **S1-2** (1927), no. 3.

G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1988, Reprint of the 1952 edition. MR 944909

Eleonor Harboure, Carlos Segovia, José L. Torrea, and Beatriz Viviani, *Power weighted L^p-inequalities for Laguerre-Riesz transforms*, Ark. Mat. **46** (2008), no. 2, 285–313. MR 2430728

Eleonor Harboure, Oscar Salinas, and Beatriz Viviani, *Boundedness of the fractional integral on weighted Lebesgue and Lipschitz spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), no. 1, 235–255. MR 1357395 (97d:42014)

- Benjamin Muckenhoupt, *Hardy's inequality with weights*, Studia Math. **44** (1972), 31–38, Collection of articles honoring the completion by Antoni Zygmund of 50 years of scientific activity, I. MR 0311856
- Benjamin Muckenhoupt and Richard Wheeden, *Weighted norm inequalities for fractional integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1974), 261–274. MR 0340523
- Adam Nowak and Krzysztof Stempak, *Weighted estimates for the Hankel transform transplantation operator*, Tohoku Math. J. (2) **58** (2006), no. 2, 277–301. MR 2248434
- H. Weyl, *Singuläre Integralgleichungen*, Math. Ann. **66** (1908), no. 3, 273–324. MR 1511502